

Théorie des graphes et optimisation

Mohamed Tounsi

Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia Sfax

Novembre 2014

Définition

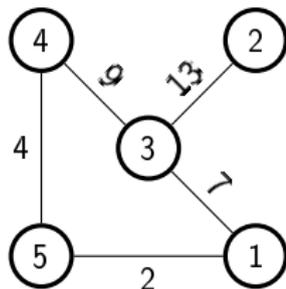
Définition

Un **graphe est valué** lorsqu'à chaque arête ou arc est associé un nombre réel. Si ce nombre est positif, on parle de poids et de **graphe pondéré**.

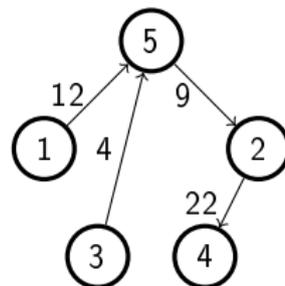
Exemples

- Un des exemples classiques de graphe pondéré est celui des cartes routières où on indique des temps, des distances,.. entre les villes.
- Le problème est souvent de trouver l'itinéraire le plus court en temps, en kilomètres, moins coûteux (carburant, péage),..

Exemples



Graphe 1



Graphe 2

Remarques

- Nous appelons **poids d'une chaîne** la somme des poids des arêtes composant cette chaîne;
- La longueur de l'arête sur le dessin n'a évidemment aucun rapport avec son poids.

Exercices

Les questions concernent le graphe 1 de la diapositive précédente.

- 1 Quelle est la longueur de la chaîne 2_1_5_4 ?
- 2 Quel est son poids ?
- 3 Quel est le diamètre de ce graphe ?
- 4 Quels sont les deux sommets le plus éloignés.
- 5 Trouver la chaîne de poids minimal reliant ces deux sommets ?

Recherche du plus court “trajet”

Introduction

- Par le terme “trajet” nous entendons ici chaîne, cycle, chemin ou circuit.
- Le plus court “trajet” ne passe pas nécessairement par tous les sommets.
- Pour déterminer le plus court “trajet”, il existe plusieurs algorithmes, dont le plus connu à ce niveau est l'**algorithme de Dijkstra**
- Cet algorithme ne fonctionne que s'il n'y a pas de valeur négative dans le graphe.

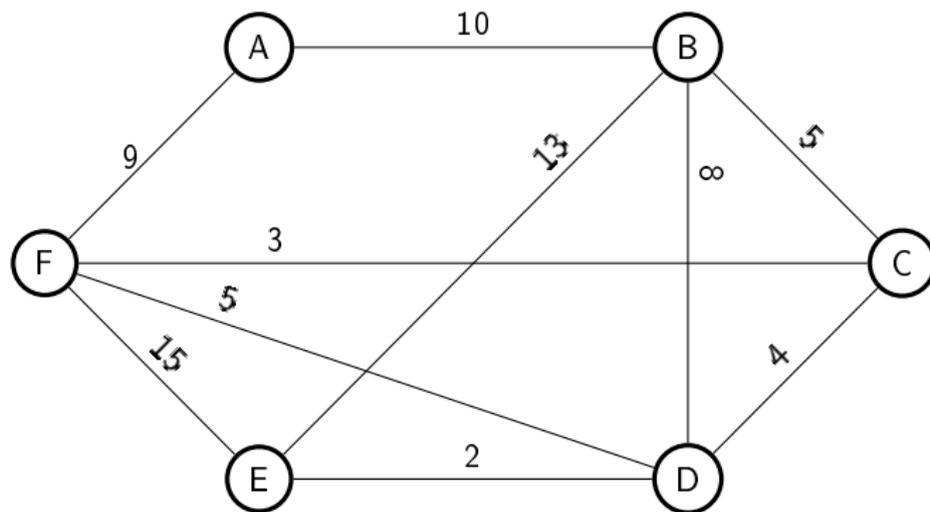
Algorithme de Dijkstra

Principe

- 1 Placer tous les sommets du graphe dans la première ligne d'un tableau; sur la deuxième ligne, écrire le coefficient 0 sous le point de départ et le coefficient ∞ sous les autres sommets.
- 2 Repérer le sommet X de coefficient minimal; commencer une nouvelle ligne et rayer toutes les cases vides sous X.
- 3 Pour chaque sommet Y adjacent à X, calculer la somme p du coefficient de X et du poids de l'arête reliant X à Y; si p est strictement inférieur au coefficient de Y, inscrire pX dans la case correspondante de la colonne Y; sinon, inscrire le coefficient de Y et compléter la ligne par des coefficients de la ligne précédente.
- 4 S'il reste des sommets non sélectionnés, retourner à l'étape 2. Sinon, passer à l'étape 5.
- 5 La longueur minimale est le nombre lu sur la dernière ligne du tableau.

Algorithme de Dijkstra

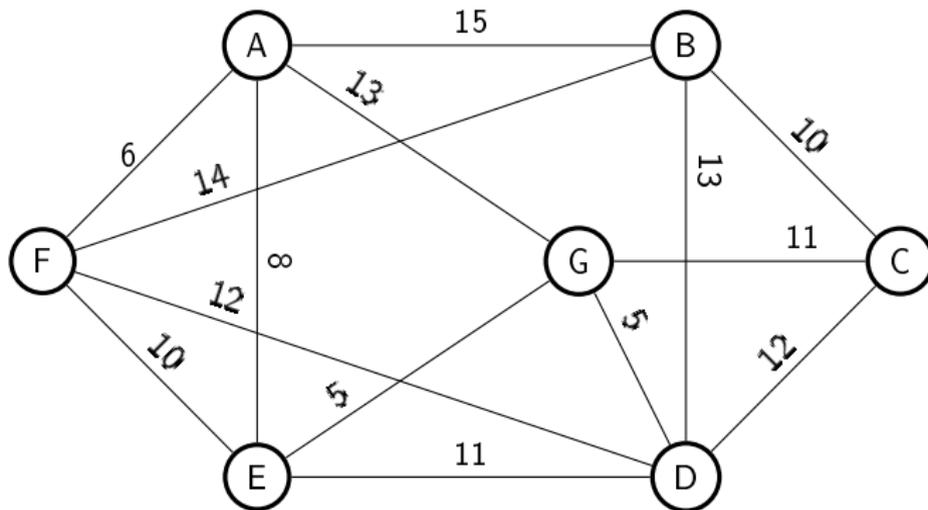
Exercice



Calculer le trajet de poids minimal de A vers E.

Algorithme de Dijkstra

Exercice



Calculer le trajet de poids minimal de A vers C.