

Théorie des graphes et optimisation

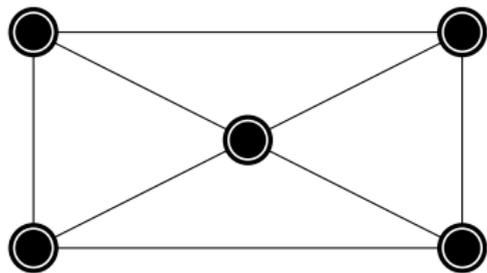
Mohamed Tounsi

Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia Sfax

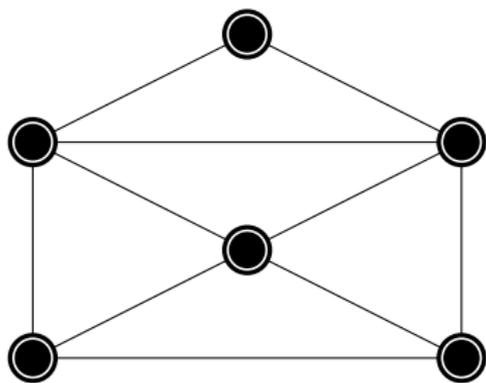
Novembre 2014

Graphe eulérien

Introduction



Graphe 1



Graphe 2

Peut-on dessiner les graphes ci-dessus:

- Sans lever le crayon;
- et en passant une fois et une seule sur chaque arête (on peut passer plusieurs fois par un même sommet).

Graphe eulérien

Définition (1)

- Dans un graphe non orienté, une chaîne est appelée “**chaîne eulérienne**” si et seulement si c’est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe prises chacune une fois et une seule.
- Si la **chaîne eulérienne** est fermée, on parle de **cycle eulérien**;
- Un graphe possédant un cycle eulérien est un **graphe eulérien**.

Remarques

- On ne peut passer sur chaque arête qu’une fois et une seule, mais on peut passer plusieurs fois par chaque sommet;
- L’adjectif “eulérien” vient du nom du mathématicien suisse *Léonhard Euler*.

Graphe eulérien

Définition (2)

Théorème Euler

- Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degrés impairs est ≤ 2
- Un graphe connexe G , tel que le nombre des arêtes est ≥ 1 , est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs

Remarque

Dans un graphe avec deux sommets de degrés impaires, toute chaîne eulérienne a donc nécessairement pour extrémités ces deux sommets.

Graphe eulérien

Algorithme Euler

ϕ : Liste des sommets du cycle dans l'ordre de parcours.

Initialiser $\phi := (x)$

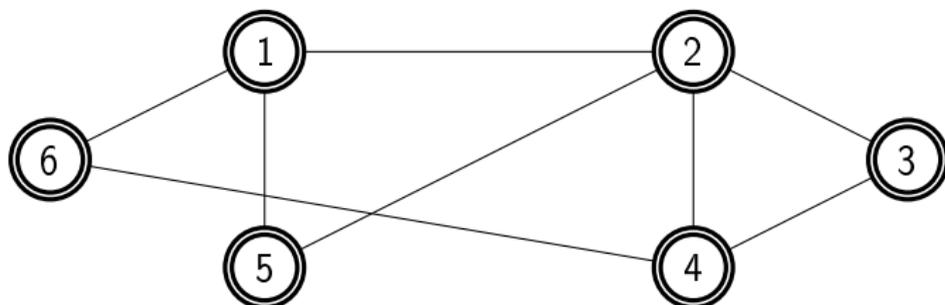
```

if (x est un sommet isolé)
  retourner  $\phi$ 
else {
  Initialiser  $y := x$ 
  while (y n'est pas un sommet isolé)
  { choisir z l'un de ses voisins
    supprimer l'arête (y,z);  $y := z$ 
     $\phi \leftarrow y$  //on ajoute le sommet au cycle
  }
  //Appel récursif sur chacun des k sommets du cycle
  //en concaténant les réponses
  retourner Euler(G, $\phi(1)$ )...Euler(G, $\phi(k)$ )
}

```

Graphe eulérien

Exercice



- 1 Est ce que le graphe ci-dessus est eulérien ?
- 2 Est ce que la suite 1 2 4 3 2 5 1 6 est une chaîne eulérienne pour ce graphe ?
- 3 Trouver une chaîne eulérienne d'origine 4;
- 4 Ajouter une arête pour rendre le graphe eulérien.

Graphe hamiltonien

Définitions (1)

- Dans un graphe non orienté, une chaîne est appelée “**chaîne hamiltonienne**” si et seulement si c’est une chaîne qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe situé entre les deux extrémités de la chaîne;
- Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe;
- Un graphe possédant un cycle hamiltonien est un **graphe hamiltonien**.

Remarques

- L’adjectif **hamiltonien** vient du nom du mathématicien anglais William Rowan Hamilton;
- Un cycle hamiltonien passe par tous les sommets, mais pas nécessairement par toutes les arêtes.

Graphe hamiltonien

Définitions (2)

Règles suffisantes

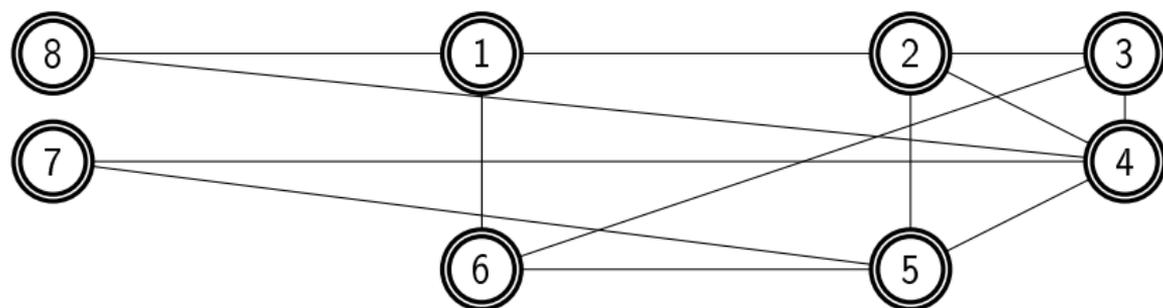
- 1 Soit un graphe G simple d'ordre $n \geq 3$. Si, pour toute paire de sommets (A, B) non adjacents on a $\text{degré}(A) + \text{degré}(B) \geq n$ alors G est hamiltonien.
- 2 Si pour tout sommet A de G , $\text{degré}(A) \geq n/2$ alors G est hamiltonien.

Remarques

- un graphe possédant un sommet d'ordre 1 ne peut pas être hamiltonien;
- si un graphe possède un sommet de degré 2, les deux arêtes dont ce sommet est une extrémité doivent faire partie de la chaîne;
- un graphe complet est toujours hamiltonien.

Graphe hamiltonien

Exercice



- 1 Est ce que le graphe ci-dessus est hamiltonien ?
 - Vérifie-t-il la règle 1 ?
 - Vérifie-t-il la règle 2 ?
- 2 Trouver un cycle hamiltonien ayant pour origine le sommet 1.
- 3 Trouver une cycle hamiltonien ayant pour origine le sommet 5.

Sources

- *Initiation à la théorie des graphes* Broché – 12 février 2009 de Christian Roux.
- *Théorie des graphes et applications : Avec exercices et problèmes* Broché – 22 avril 2011 de Jean-Claude Fournier.