Théorie des graphes et optimisation

Mohamed Tounsi

Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia Sfax

Septembre 2014

Responsable du cours

Mohamed TOUNSI,

J'enseigne à l'ISIMS

Ma page personnelle est http://tounsi.voila.net

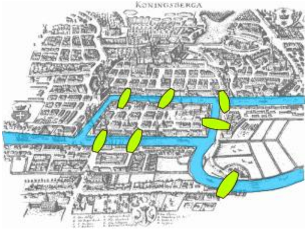
Mon e-mail est mohamed.tounsi@fsegs.rnu.tn

Plan de l'unité

1. Les graphes simples et notions de base
2. Les graphes orientés
3. Les graphes valués et l'optimisation
4. Les arbres

Les ponts de Königsberg (1)

- La question à l'origine de la théorie des graphes est due à Euler, en 1736 : dans cette partie de la ville de Königsberg :

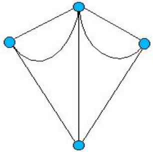


- Peut-on, lors d'une promenade, revenir à notre point de départ en empruntant une, et une seule fois, chaque pont ?
- Le problème est décrit dans cette vidéo:

www.youtube.com/watch?v=zKCK796Y4Fw

Les ponts de Königsberg (2)

- Pour y répondre, Euler a introduit le graphe suivant (les arcs symbolisent les ponts ; les sommets, les quatre zones terrestres):



  - Le problème de départ se ramène alors à la question suivante: peut-on trouver un circuit permettant d'emprunter une, et une seule fois chaque arête, en retournant à son point de départ ?
  - La réponse, dans ce cas particulier, est **non**

Notions de base
Définitions

Graphe

Un **graphe** fini G=(V, E) est défini par l'ensemble fini V=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets (Vertices en anglais), et par l'ensemble fini E =$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes (Edges en anglais).

Arête

Une **arête** e de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de e.
Si l'arête e relie les sommets a et b, on dira que ces sommets sont adjacents, ou incidents avec e, ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets a et b.

Notions de base

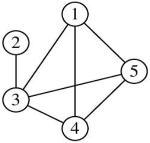
Remarques

- Les graphes tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. À chaque sommet de G, on correspond un point distinct du plan et on relie les points correspondant aux extrémités de chaque arête,
- Les objets représentés par les sommets sont sans importance pour la manipulation du graphe,
- On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets n de ce graphe.

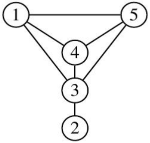
Quelques types de graphes
Graphe planaire

Graphe planaire

Un graphe est dit planaire s'il admet une représentation graphique dans le plan telle que deux arêtes quelconques ne se coupent pas.
NB: les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.



Une représentation non planaire du graphe G (des arêtes se croisent)



Une représentation planaire de G

Quelques types de graphes

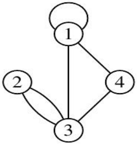
Graphe simple

Graphe simple

Un graphe est simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Multigraphes

Les graphes qui possèdent une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets s'appellent des multigraphes.

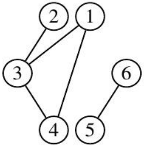


Multigraphe

Quelques types de graphes
Graphe connexe

Graphe connexe

Un graphe est connexe s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes.



Graphe non connexe

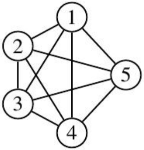
- un graphe non connexe se décompose en composantes connexes.
- les composantes connexes, sur le graphe ci-dessus, sont {1,2,3,4} et {5,6}.

Quelques types de graphes

Graphe complet

Graphe complet

Un graphe est complet si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.



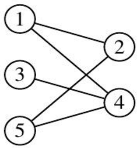
Graphe complet K_5

Quel est le plus petit graphe non planaire ?

Quelques types de graphes
Graphe biparti

Graphe biparti

Un graphe est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y



Graphe biparti

Dans l'exemple ci-dessus, on a $X = \{1,3,5\}$ et $Y = \{2,4\}$, ou vice versa.

Degré

Degré d'un sommet/Degré d'un graphe

Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes incidentes à x. Il est noté d(x).

Degré d'un graphe

- Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.
- Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier.
- Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Propriétés

- La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.
- Dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.

Sous-graphes

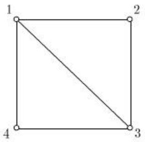
Définition

Soit G=(X, E) un graphe. Un sous graphe de G est un graphe de la forme H=(Y,F) où $Y \subset X$ et $F \subset E$ sont tels que toute arête de F a ses extrémités dans Y.

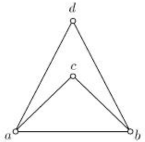
- Un sous graphe H de G est dit **engendré** (ou **induit**) s'il est de la forme H=(Y,F) où F est l'ensemble des arêtes de E qui ont leurs extrémités dans Y.
- Un sous graphe H=(Y,F) de G est dit **couvrant** si Y=X. on dit aussi dans ce cas que H est un graphe **partiel** de G.

Isomorphisme de graphes

- Les graphes G_1=(V_1, E_1) et G_2=(V_2, E_2) sont Isomorphes s'il existe une fonction bijective f telle que f: $V_1 \rightarrow V_2$
- Ainsi, pour tous sommets a, b $\in V_1$: a et b sont adjacents dans G_1 si et seulement si f(a) et f(b) sont adjacents dans G_2.



graphe G



graphe G'

Montrer que G et G' sont isomorphes ?

Chaînes et cycles

chaînes (1)

- Une chaîne d'un graphe G=(X,E) est une suite de la forme:

  $$(x_0,\ e_1,\ x_1,\ \ldots,\ e_k,\ x_k)$$

  où k est un entier >= 0, les x_i sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes de G tels que pour i= 0,...,k-1; x_i et x_{i+1} sont des extrémités de e_{i+1},
- L'entier K est la longueur de la chaîne,
- Les sommets x_0 et x_k sont les extrémités de la chaîne.
- Une chaîne est simple si chaque arête de la chaîne est empruntée une seule fois.

Chaînes et cycles
chaînes (2)

- une chaîne est dite élémentaire si ses sommets x_i, pour i=0,1,..,k, sont deux à deux distincts. On dit que la chaîne ne passe pas deux fois par un même sommet.
- Une chaîne élémentaire est une chaîne simple.
- Si dans un graphe deux sommets sont reliés par une chaîne alors ils sont reliés par une chaîne élémentaire.

Preuve:

Chaînes et cycles
cycles

- Un cycle est une chaîne de longueur >= 1 simple et fermée. C'est donc une chaîne de la forme:
$$(x_0, e_1, x_1, ..., e_k, x_0)$$
où k >=1 et les e_i sont distincts.
- L'entier K est la longueur du cycle.
- Un cycle est élémentaire si ses sommets x_i, pour i=0,..,k-1, sont deux à deux distincts.
- Un cycle est dit pair ou impair suivant que sa longueur est paire ou impaire.
- Un graphe dans lequel il n'existe aucun cycle est dit acyclique.

Connexité

Définitions

graphe connexe

Un graphe G est connexe ssi il existe une chaîne entre chaque paire de sommets de ce graphe.

Que se passe-t-il si le graphe G n'est pas connexe?

- Il apparaît alors comme un ensemble de graphes connexes "mis" les uns à coté des autres.
- Chacun de ces graphes est un sous-graphe particulier de G, appelé composante connexe.

composante connexe

Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe G'=(V',E') connexe maximal: il n'est pas possible d'ajouter à V' d'autres sommets en conservant la connexité du sous-graphe.

Connexité

Propriétés

- Un graphe ne possédant qu'une seule composante connexe est simplement un graphe connexe.
- Un graphe G d'ordre n connexe comporte au moins n-1 arêtes.
- Si dans un graphe G tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.
- Un graphe sans cycle possède au moins un sommet de degré 0 ou 1.
- Un graphe acyclique G à n sommets possède au plus n-1 arêtes.

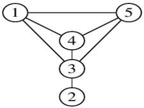
représentation non graphique d'un graphe

Matrices d'adjacences

On peut représenter un graphe simple par une matrice d'adjacences.

Définition

Une matrice (n*m) est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j . Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

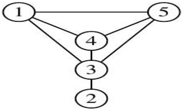
Exemple d'une matrice d'adjacences

Citer quatre caractéristiques de cette matrice ?

représentation non graphique d'un graphe

Listes d'adjacences

- On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent. Ce sont les listes d'adjacences.



1 : 3, 4, 5
2 : 3
3 : 1, 2, 4, 5
4 : 1, 3, 5
5 : 1, 3, 4

Exemple d'une liste d'adjacences

Sources

- *Initiation à la théorie des graphes* Broché – 12 février 2009 de Christian Roux.
- *Théorie des graphes et applications : Avec exercices et problèmes* Broché – 22 avril 2011 de Jean-Claude Fournier.
- *Introduction à la théorie des graphes*, CAHIERS DE LA CRM, Didier Müller, Décembre 2011