Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Sfax
Année universitaire: 2014-2015
Module: Méthodes Formelles
Enseignant: Mohamed TOUNSI
Auditoire: 1 année Master - SINT

Calcul des séquents

1 Introduction

Le calcul des séquents est inventé par Gentzen dans le cadre de la démonstration de la complétude de la logique des prédicats du premier ordre. Intuitivement, pour prouver la complétude d'un système, il faut prouver que toute thèse est démontrable, donc montrer que connaissant une thèse, on peut construire sa démonstration. La bonne méthode pour y arriver consiste à se munir d'un système général de recherche de preuves. Gentzen a proposé des relations de déduction entre séries de formules.

2 Les règles du calcul des séquents

Un séquent (Γ, ϕ), où $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ est un ensemble de formules, est *valide* si:

$$\left(\bigwedge_{i=1,\ldots,n} \psi_i \right) \quad \Rightarrow \quad \phi$$

est une formule valide. On note alors $\Gamma \models \phi$.

On note $\Gamma \vdash \phi$ lorsque le séquent est *prouvable* par l'application des règles ci-après un nombre fini de fois. Le théorème fondamental:

$$\Gamma \models \phi \qquad \text{si et seulement si} \qquad \Gamma \vdash \phi$$

indique que tout séquent prouvable est valide et inversement. Ce résultat montre que tout théorème peut être prouvé par simple calcul syntaxique, sans faire appel à la sémantique.

On présente ci-dessous les règles du calcul des séquents augmentées des règles pour les connecteurs $\wedge$ et $\vee$.

1. Utilisation d'une hypothèse : $\dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi}$
2. Augmentation des hypothèses: $\dfrac{\Gamma \vdash \phi \quad \psi \notin \Gamma}{\Gamma, \psi \vdash \phi}$
3. Détachement / *Modus ponens*: $\dfrac{\Gamma \vdash (\phi \implies \phi') \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi'}$

4. Retrait d'une hypothèse : $\dfrac{\Gamma, \psi \vdash \phi}{\Gamma \vdash (\psi \implies \phi)}$

5. Double négation: $\dfrac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}$

6. Raisonnement par l'absurde: $\dfrac{\Gamma, \psi \vdash \phi \qquad \Gamma, \psi \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \neg\psi}$

7. Conjonction : $\dfrac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \phi'}{\Gamma \vdash (\phi \wedge \phi')}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash (\phi \wedge \phi')}{\Gamma \vdash \phi}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash (\phi \wedge \phi')}{\Gamma \vdash \phi'}$

8. Disjonction: $\dfrac{\Gamma, \psi \vdash \phi \qquad \Gamma, \neg\psi \vdash \phi'}{\Gamma \vdash (\phi \vee \phi')}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma, \psi \vdash \phi \qquad \Gamma, \psi' \vdash \phi}{\Gamma, (\psi \vee \psi') \vdash \phi}$

3 Exercice

Démontrer la validité des séquents suivants:

1. $A, B \vdash (A \wedge B)$
2. $A, (A \Rightarrow B) \vdash B$
3. $A, B, (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \vdash C$
4. $(A \vee B), (A \Rightarrow C), (B \Rightarrow C) \vdash C$