Méthodes formelles

Mohamed Tounsi

Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Sfax

Avril 2015

Théorie des ensembles

Définitions

- Un ensemble est la réunion dans une même entité de certains objets bien déterminés.
- On appelle ces objets les éléments de l'ensemble.
- Si x désigne l'un des éléments de l'ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.
- Si x n'est pas l'un des éléments de l'ensemble E, on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$.

Théorie des ensembles

Ensembles usuels en mathématiques

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}_1$: ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels positifs.

Théorie des ensembles

Définir un ensemble

Un ensemble peut être décrit de 2 manières :

1. En extension: on dresse la liste de tous les éléments de l'ensemble.
   - Exemple: $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
   - L'ordre ainsi que la répétition des éléments est sans importance.
2. En compréhension: on énonce la propriété caractéristique des éléments de l'ensemble.
   - Exemple: $E = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} \mid 1 < \mathrm{x} < 9\}$
   - Ainsi, E contient les éléments 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8

Théorie des ensembles

Définir un ensemble

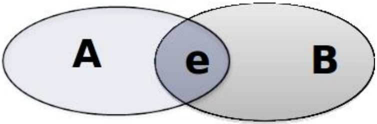
- Un ensemble E est dit fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel.
- Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E. On note $Card(E)$.
  Exemple: Si $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ alors $Card(E) = 6$.
- On appelle singleton un ensemble composé d'un seul élément.
- L'ensemble vide est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\varnothing$. Par convention, $Card(\varnothing) = 0$.

Théorie des ensembles

Intersection

- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.
- lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

$$\boxed{e \in A \cup B \text{ signifie } e \in A \textbf{ et } e \in B}$$

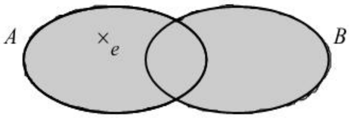


Théorie des ensembles

Union

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.

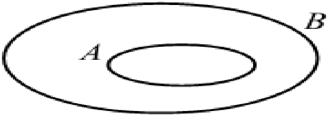
$$\boxed{e \in A \cup B \text{ signifie } e \in A \textbf{ ou } e \in B}$$



Théorie des ensembles

Inclusion

- Un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors A $\subset$ B.
- On dit alors que A est une "partie" de B ou que A est un "sous-ensemble" de B.



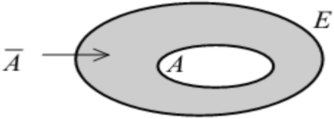
$$A \subset (A \cup B)$$
$$B \subset (A \cup B)$$
$$(A \cap B) \subset A$$
$$(A \cap B) \subset B$$
$$(A \cap B) \subset (A \cup B)$$
$$\varnothing \subset A$$
$$\varnothing \cap A = \varnothing$$
$$\varnothing \cup A = A$$

Théorie des ensembles

Complémentaire

- Soit E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note E\A ou $\overline{A}$ ou encore $\mathrm{C}_E(\mathrm{A})$.

$$\boxed{\mathrm{A} \cup \overline{A} = \mathrm{E} \text{ et } \mathrm{A} \cap \overline{A} = \varnothing}$$

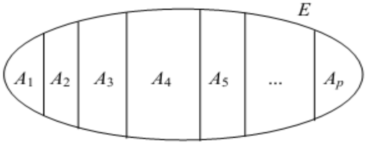


Théorie des ensembles

Partition

- Des parties A_1, A_2, A_3,..., A_p d'un ensemble E constituent une partition de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tous i et j de } \{1,\ldots,p\} \text{ tel que i} \neq \text{j alors } A_i \cap A_j = \varnothing \\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_p = E\end{array}}$$



Théorie des ensembles

Propriétés des opérations sur les ensembles

- Commutativité de la réunion et l'intersection

$$\boxed{A \cup B = B \cup A \text{ et } A \cap B = B \cap A}$$

- Associativité de la réunion et l'intersection

$$\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ et } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$$

- Idempotence

$$\boxed{A \cup A = A \text{ et } A \cap A = A}$$

- Distributivité

$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

- Dualité (Formules de MORGAN)

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

Théorie des ensembles

Produit cartésien

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où x appartient à E et y appartient à F. Cet ensemble est noté E × F.
- Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors $E \times F = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (c, 1); (c, 2)\}$

Théorie des ensembles

Compositions de relations

- Soient $R \subset (A \times B)$ et $S \subset (B \times C)$ deux relations.
- La relation $R \circ S$ est une relation binaire sur $A \times C$ appelée composée de R et S telle que

$$\boxed{a\ (R \circ S)\ c \Leftrightarrow \exists\ b \in B,\ (a\ R\ b \wedge b\ S\ c)}$$

Théorie des ensembles

Les relations (1)

- Domaine, image, relation inverse:
  soit deux ensembles U et V et la relation R : X $\leftrightarrow$ Y

$$\boxed{\begin{array}{l} dom(R) == \{x \in X,\ y \in Y \mid (x,y) \in R \cdot x\} \\ ran(R) == \{x \in X,\ y \in Y \mid (x,y) \in R \cdot y\} \\ R^{-1} == \{x \in X,\ y \in Y \mid (x,y) \in R \cdot (y,x)\} \end{array}}$$

- Restrictions de domaine et d'image:
  soit deux ensembles A et B et les ensembles X, Y et R tels que définis précédemment.

$$\boxed{\begin{array}{l} A \lhd R == \{x \in X,\ y \in Y \mid (x,y) \in R \wedge x \in A \cdot (x,y)\} \\ R \rhd B == \{x \in X,\ y \in Y \mid (x,y) \in R \wedge y \in B \cdot (x,y)\} \end{array}}$$

Théorie des ensembles

Les relations (2)

- Soustraction de domaine et d'image:
  Soit les ensembles X, Y, R, A et B définis précédemment.

$$\boxed{\begin{array}{l} A \lhd R == \{x \in X,\ y \in Y \mid (x,y) \in R \land x \notin A \cdot (x,y)\} \\ R \rhd B == \{x \in X,\ y \in Y \mid (x,y) \in R \land y \notin B \cdot (x,y)\} \end{array}}$$

- Image relationnelle:
  Soit les ensembles X, Y, R et A définis précédemment.

$$\boxed{\mathrm{R}\ (\!|\ \mathrm{A}\ |\!) == \mathrm{ran}\ (\mathrm{A} \lhd \mathrm{R})}$$

Théorie des ensembles

Les fonctions (1)

Définition

Une fonction est une relation telle que tous les éléments de l'ensemble de départ sont impliqués dans au plus un couple ordonné de celle-ci.

- Fonction totale: une fonction pour laquelle le domaine correspond à l'ensemble de départ.
- Fonction partielle: une fonction pour laquelle le domaine est strictement inclut dans l'ensemble de départ.
- Fonction injective: une fonction pour laquelle à chaque élément du domaine correspond un élément différent de l'image.
- Fonction surjective: une fonction pour laquelle l'image correspond à l'ensemble d'arrivée.
- Fonction bijective: une fonction à la fois injective et surjective.

Théorie des ensembles

Les fonctions (2)

→	fonction totale
⇸	foncton partielle
↣	fonction totale injective
⤔	fonction partielle injective
↠	fonction totale surjective
⤀	fonction partielle surjective
⤖	fonction bijective
⇻	fonction finie
⤕	fonction finie injective