Méthodes formelles

Mohamed Tounsi

Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Sfax

Avril 2015

Logique des propositions

Limites du calcul propositionnel

modéliser avec la logique des propositions

- Les chandelles sont faites pour éclairer,
- Certaines chandelles éclairent très mal,
- Certains objets qui sont faits pour éclairer le font très mal.

Impossible

Logique du premier ordre

Une modélisation

- Les chandelles sont faites pour éclairer

$$\forall x,\ chandelle(x) \Rightarrow eclaire(x)$$

- Quelques chandelles éclairent très mal

$$\exists\ x,\ chandelle(x) \wedge eclaireMal(x)$$

- Quelques objets qui sont faits pour éclairer le font très mal

$$\exists\ x,\ eclaire(x) \wedge eclaireMal(x)$$

Logique du premier ordre

Syntaxe

- des connecteurs ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$)
- des quantificateurs ($\forall$ et $\exists$)
- des variables (x, y, ...)
- des relations (prédicats) (R, S, éclaire, ...)
- des symboles de fonctions (f, g, ...)
- les fonctions d'arité 0 sont appelées des constantes

Logique du premier ordre

De nouveaux outils:

- Notion de relation,
- Notion de variable,
- Notion de fonction,
- Notion de quantification.

Remarques:

- Dans un langage du premier ordre, seules les variables sont quantifiées,
- Dans un langage du second ordre, on peut aussi quantifier les relations et les fonctions.

Logique du premier ordre

Vocabulaire

Les termes

- les variables et les constantes sont des termes
- f(t_1 ,..., t_n) est un terme si:
  - les t_i sont des termes,
  - f est un symbole de fonction d'arité n.

Les atomes

R(t_1 ,..., t_n) est un atome si

- les t_i sont des termes,
- R est un symbole de relation d'arité n.

Logique du premier ordre

Formules

- Un atome est une formule,
- Si F et G sont des formules et x une variable, alors les expressions suivantes sont des formules:
    - $\neg(F)$
    - $(F) \wedge (G)$ et $(F) \vee (G)$
    - $(F) \Rightarrow (G)$ et $(F) \Leftrightarrow (G)$
    - $\forall\, x\, (F)$ et $\exists\, x\, (G)$
- Les priorités des connecteurs sont identiques à la logique des propositions, mais les quantificateurs sont plus prioritaires.

Logique du premier ordre

Exemple: Les calcul dans les entiers

- 0, 1, 2, 3,... sont des fonctions d'arité 0 (des constantes),
- +, -, *, / sont des fonctions d'arité 2 (- peut aussi désigner une autre fonction d'arité 1),
- les termes représentent alors des valeurs dans $\mathbb{Z}$,
- $=, <, >, \geq, \leq, \neq$ sont des prédicats d'arité 2,
- les formules atomiques sont alors des propriétés de base sur les valeurs arithmétiques: (=(+(2,3),5), <(+(x,1),*(y,-(2,z))));
- les formules représentent des propriétés plus complexes:
  - $\forall$x . >(+(x,1),x)
  - $\exists$x $\forall$y . (=(*x,y),0)$\wedge$ =(x,1))
  - $\exists$x $\forall$y . =(*x,y),0)$\wedge$ =(z,1)

Logique du premier ordre

Occurrence d'une variable

- Une occurrence d'une variable x dans une formule F est un endroit où x apparaît dans F sans être immédiatement précédée par $\exists$ ou $\forall$
- Une occurrence libre de x dans F est définie:
  - Si F est un atome, toutes les occurrences de x sont libres
  - Si F $= \neg$(G), les occurrences libres de x sont celles de G
  - Si F $=$ (G) ∇ (H), les occurrences libres de x sont celles de G et celles de H
  - Si F $= \forall$y(G) ou F $= \exists$y(H) avec x distinct de y, les occurrences libres de x sont celles de G et celles de H
  - Si F $= \forall$ x(G) ou F $= \exists$ x(H), aucune occurrence de x dans F n'est libre
- Une formule n'ayant pas de variable libre est dite close

Logique du premier ordre

Occurrence d'une variable: exemples

- Dans les formules suivantes, les variables libres sont soulignées:
  - $f(\underline{x},0) \vee \forall\, x.\ f(x,\underline{y})$
  - $\exists x.\ ((\exists\, y.\ f(x,y)) \vee f(x,\underline{y}))$
- Si une variable peut être capturée par deux quantificateurs, elle est capturée par le plus proche:
  - $\forall\, x.\ (\exists\, x.\ f(x) \vee \neg f(x))$
  - Le premier f(x) se rapporte à $\exists x$, tandis que le second se rapporte à $\forall x$.
- La capture n'a de sens que pour les variables. on ne peut pas capturer une constante.

Logique du premier ordre

Sémantique

1. Donner un sens aux fonctions et prédicats (**interprétation**):
   - définition d'un domaine, ensemble d'objets du monde,
   - définition de la sémantique des fonctions (allant du domaine vers le domaine) et des prédicats (du domaine vers les booléens).
2. Donner, si nécessaire, un sens au variables libres (**affectation**).

Logique du premier ordre

Sémantique: interprétation

Définition

- Une **interprétation** I est la donnée d'un ensemble D_I non vide, appelé le domaine de l'interprétation avec les:
  - application I(f) de D_I^m dans D_I pour chaque fonction f d'arité m
  - application I(P) de D_I^n dans $\mathbb{B}$ pour chaque prédicat P d'arité n

Exemple

une fonction f d'arité 2, une fonction cst d'arité 0 et un prédicat P d'arité 1:

- un domaine D_I
- une fonction $I(f)$ allant de D_I^2 dans D_I
- un élément $I(cst)$ de D_I
- une fonction $I(P)$ allant de D_I dans $\mathbb{B}$

Logique du premier ordre

Validité, satisfiabilité, modèle

- Une formule est **valide** si elle vraie dans toute interprétation et toute affectation (sinon elle est **invalide**),
- Une formule est **insatisfiable** si elle est fausse dans toute interprétation et toute affectation (sinon elle est **satisfiable**),
- Si une formule est close, le fait qu'elle soit vraie ne dépend que de l'interprétation. Une interprétation I dans le quelle une formule close Φ. On note $\mathrm{I} \models \Phi$
- Une **théorie** est un ensemble de formules closes. Si I satisfait toutes les formules d'une théorie T, alors I est un modèle de T (noté aussi $\mathrm{I} \models \mathrm{T}$).
- Une théorie **consistante** est une théorie qui a au moins un modèle, sinon la théorie est **contradictoire**.

Logique du premier ordre

Théorie: exemples

Théorie définissant une relation d'ordre strict

- $\forall x. \neg P(x,x)$ (irréflexivité)
- $\forall x. \forall y. \forall z. (P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$ (transitivité)

exemple: les entiers avec la relation $<$, les ensembles avec la propriété d'inclusion stricte,...

Théorie définissant une relation d'équivalence

- $\forall x. P(x,x)$ (reflexivité)
- $\forall x. \forall y. (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$ (symétrie)
- $\forall x. \forall y. \forall z\ (P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$ (transitivité)

exemple: toute propriété de la forme “est de même type que” ou “est de même parité que”....

Logique du premier ordre

Transport des quantificateurs

- $\neg(\exists x\ F) \Leftrightarrow \forall x\ \neg F$
- $\forall x\ \forall y\ F \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ F$
- $\forall x\ F \wedge \forall x\ H \Leftrightarrow \forall x(F \wedge H)$

- $\neg(\forall x\ F) \Leftrightarrow \exists x\ \neg F$
- $\exists x\ \exists y\ F \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ F$
- $\exists x\ F \vee \exists x\ H \Leftrightarrow \exists x(F \vee H)$

et si H ne contient aucune occurrence de x

- $(\forall x\ F) \vee H \Leftrightarrow \forall x(F \vee H)$
- $\forall x\ H \Leftrightarrow H$

- $(\exists x\ F) \wedge H \Leftrightarrow \exists x(F \wedge H)$
- $\exists x\ H \Leftrightarrow H$