Méthodes formelles

Mohamed Tounsi

Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Sfax

Avril 2015

Définitions

- Une proposition est un énoncé du langage ordinaire considéré du point de vue formel.
- Cet énoncé est soit <u>vrai</u> soit <u>faux</u> mais pas les deux,
- La proposition est <u>vrai</u> s'il y a une adéquation entre la proposition et les faits du monde réel, fausse sinon.

Exemples

- «Le chat du voisin est mort» est une proposition,
- «ce diapo explique la notion de proposition» est une proposition <u>vrai</u>.

1. Comment écrire les formules? (Aspects syntaxiques)
2. Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ? (Aspects sémantiques)
3. Comment démontrer de nouveaux résultats ? (Aspects déductifs)

Données

- Un ensemble P de variables propositionnelles, P = { p, q, r, ... }
- Un ensemble C de connecteurs, C = $\{ \Rightarrow , \Leftrightarrow , \neg , \vee , \wedge \}$

Formules

- p est une formule si $p \in P$
- $\neg$ (H) est une formule si H est une formule
- (H)Δ(K) est une formule si H et K sont des formules et si $\Delta \in C$

Exemples

- $(p) \wedge (q)$ ou aussi $(p) \Rightarrow ((q) \Rightarrow (p))$
- $(p)(q) \Rightarrow$: non valide

- Logique bi-valuée:
  - faux (0)
  - vrai (1)
- Notion d'interprétation: donner une valeur de vérité à une variable

$$\delta\ (\mathrm{p}) \in \{0{,}1\}$$

- Interprétation des opérateurs:
  - A chaque connecteur c de C, on associe un opérateur c.
  - Par exemple, à $\neg$ est associé l'opérateur unaire $\neg$ de $\{0{,}1\}$ dans $\{0{,}1\}$:

$$\neg\ (0) = (1)$$
$$\neg\ (1) = (0)$$

Table de vérité

C'est un tableau dont les lignes représentent toutes les interprétations possibles.

p	q	$\neg$ p	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\Rightarrow$ q	p $\Leftrightarrow$ q
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tautologies

- formules toujours vraies,
- c-a-d, la table de vérité ne contient que des 1,
- exemple : $p \lor \neg p$

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$
0	1	1
1	0	1

Trois catégories de formules:

- Tautologies : formules toujours vraies,
- Formules inconsistantes :
  - formules toujours fausses,
  - la table de vérité ne contient que des 0,
  - exemple: $p \wedge \neg p$
- Formules consistantes: formules non toujours fausses,

$$\exists\ \delta,\ \delta(F) = 1$$

- Formules tautologiquement équivalentes:

  Les tables de vérité sont les mêmes.

  $$\forall\ \delta,\ \delta(\mathrm{F}) = \delta(\mathrm{H})$$

- Condition nécessaire et suffisante:

  (F) $\Leftrightarrow$ (H) est une tautologie $\vdash$ (F) $\Leftrightarrow$ (H)

- Exemple:

  p $\Rightarrow$ q et $\neg$p $\vee$ q sont tautologiquement équivalentes.

  On peut donc écrire :

  $$\vdash(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{p} \vee \mathrm{q})$$

Quelques équivalences utiles

- $F \lor G == G \lor F$
- $F \lor \neg F == 1$
- $\neg(\neg F) == F$
- $F \Rightarrow G == \neg F \lor G$
- $F \Leftrightarrow G == (F \Rightarrow G) \land (G \Rightarrow F)$
- $F \land G == G \land F$
- $F \land \neg F == 0$

Lois de Morgan

- $\neg\ (F \land G) == \neg F \lor \neg G$
- $\neg\ (F \lor G) == \neg F \land \neg G$

Propriétés de $\wedge$ et $\vee$

- Associativité,
- distributivité (dans les deux sens),
- éléments neutres (0 pour $\vee$ et 1 pour $\wedge$)
- éléments absorbants (1 pour $\vee$ et 0 pour $\wedge$)

Formes normales

- avoir une représentation uniforme des formules du calcul propositionnel,
- limiter le nombre de connecteurs différents utilisés,
- limiter l'allure des formules rencontrées.

Forme normale disjonctive

- Une formule **F** est dite sous forme normale disjonctive ssi **F** est une disjonction de conjonctions de variables propositionnelles et de leur négation.
- Toute formule du calcul propositionnel est tautologiquement équivalente à une formule sous forme normale disjonctive.

Forme normale conjonctive

- Une formule **F** est dite sous forme normale conjonctive ssi **F** est une conjonction de disjonctions de variables propositionnelles et de leur négation.
- Toute formule du calcul propositionnel est tautologiquement équivalente à une formule sous forme normale conjonctive.

Formes normales (exemples)

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ est une formule sous forme normale disjonctive non canonique.
- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ est une formule sous forme normale disjonctive canonique.

Définitions

- Soit A = {F1, F2, F3, ... Fn} un ensemble de n formules de F, et G une formule,
- On dit que G est conséquence logique de A si et seulement si toute distribution de valeur de vérité satisfaisant simultanément toutes les formules de A satisfait G.
- $A \vdash G$ ssi $\vdash (F1 \wedge .... \wedge Fn) \Rightarrow G$
- $A \vdash G$ ssi $F1 \wedge .... \wedge Fn \wedge \neg G$ est inconsistante (démonstration par l'absurde / notion de réfutation)

Exemples

- On a ainsi : $\{p \Rightarrow q, p\} \vdash q$ et aussi $\{p \Rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$

- Un système formels S est la donné de:
  - un ensemble dénombrable V de symboles,
  - un ensemble F de formules ($F \subset V^*$),
  - un ensemble A d'axiomes ($A \subset F$),
  - un ensemble fini R de règles de déduction ou d'inférence.
- Une règle d'inférence est un ensemble de conditions et la conclusion qu'on peut en tirer.
- Par exemple: $p \Rightarrow q$ et p, on peut déduire q (règle du **modus ponens**)

- Une démonstration (ou une déduction) dans un système formel S est une suite d'énoncés A_1, ... A_n telle que :
  - A_i est un axiome de S, ou,
  - une conséquence des énoncés précédents par application d'une des règles de déduction
- Un théorème de S est le dernier énoncé d'une démonstration
- NB: différence entre conséquence logique et démonstration

Soit J un ensemble de formules. Un énoncé A est dit déductible sous les hypothèses J, si et seulement s'il existe une suite finie dénoncés A_1, A_2,... A_n telle que :

- $A_i = A$,
- pour tout i
  - A est un axiome ou,
  - A $\in$ J ou
  - A découle d'énoncés précédents par application d'une règle d'inférence

On note J $\models$ A

Principales règles d'inférences:

- **modus ponens**

$$p,\ p \Rightarrow q \vdash q$$

- **modus tollens**

$$p \Rightarrow q,\ \neg\, q \vdash \neg p$$

- **syllogisme**

$$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$$

Propriétés d'un système formel (théorèmes):

- Un système formel est correct ssi $\models$ A alors $\vdash$ A

  tout ce qui est démontrable est vrai

- Un système formel est complet ssi $\vdash$ A alors $\models$ A

  tout ce qui est vrai est démontrable